Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2012. március 10.

IX. OSZTÁLY

1. feladat. Oldd meg a valós számok hakmazán az

$$[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$$

egyenletet!

($[x]$ az x valós szám egészrészét, $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli.)

2. feladat. Igazold, hogy az a, b, c szigorúan pozitív valós számokra fennáll az

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}$$

egyenlőtlenség!

Gazeta Matematică

3. feladat. Az ABC háromszög B és C csúcsain átmenő kör az (AB) és (AC) oldalakat az N, illetve M pontbn metszi. Legyenek $P \in (MN)$ és $Q \in (BC)$ olyan pontok, amelyekre BAC és PAQ sszögek szögfelezői egyebeesnek.

a) Igazold, hogy

$$\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}.$$

b) Igazold, hogy a $(BM), (CN)$ és (PQ) szakaszok felezőpontjai kollineárisak!

4. feladat. Egy természetes számokból álló $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat növekvő, nem állandó és a_n *osztja* n^2*-et, bármely* $n \geq 1$ *esetén.* Igazold, hogy a következő állítások közül az egyik igaz:

- Létezik olyan n_1 természetes szám, amelyre $a_n = n$ bármely $n \geq n_1$ esetén!
- Létezik olyan n_2 természetes szám, amelyre $a_n = n^2$ bármely $n \geq n_2$ esetén!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.